

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2017
Β' ΦΑΣΗ

ΤΑΞΗ: Γ' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ / ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

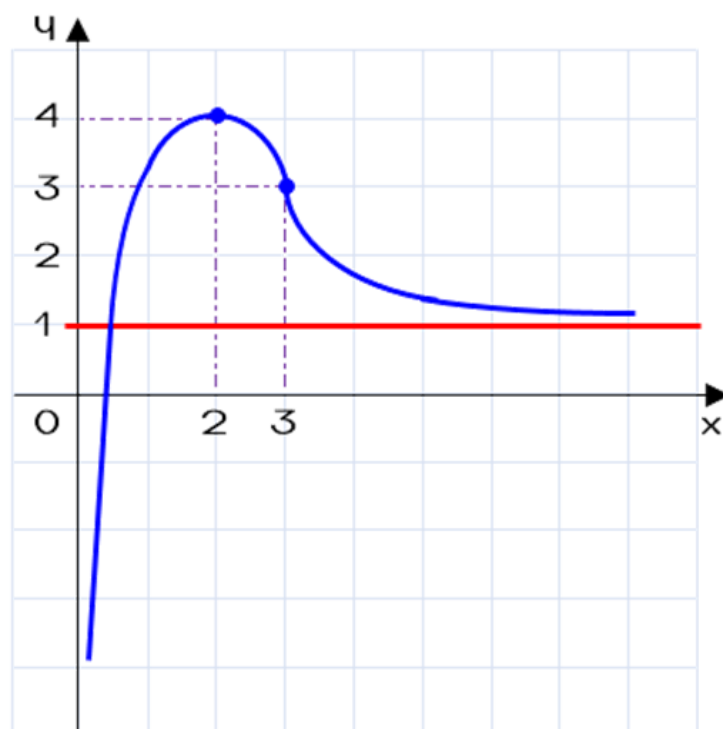
Ημερομηνία: Τετάρτη 19 Απριλίου 2017
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ .
Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ .
- Να αποδείξετε ότι: όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x) = F(x) + c, c \in \mathbb{R}$ είναι παράγουσες της f στο Δ
 - Να αποδείξετε ότι: κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x) = F(x) + c, c \in \mathbb{R}$
- Μονάδες 8**
- A2.** Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό ελάχιστο;
- Μονάδες 4**
- A3.** Πότε μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση 1–1.
- Μονάδες 3**
- A4.** Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$.
Με βάση το σχήμα να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.
- (α) Για $x = 2$ η f παρουσιάζει μέγιστο το $f(2) = 4$.
- (β) Η ευθεία $y = 1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.
- (γ) Η f' είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0, 2]$.
- (δ) Η εξίσωση $f(x) = \lambda$ έχει το πολύ δύο ρίζες για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.
- (ε) Ισχύει ότι: $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(f(x) - 1)] = -\infty$.

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2017
Β' ΦΑΣΗ



Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - 1$ με $A_f = \mathbb{R}$.

B1. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και ότι η αντίστροφη της f είναι η συνάρτηση $f^{-1}(x) = \ln(x+1), x > -1$

Μονάδες 6

B2. Να μελετήσετε τις συναρτήσεις f και f^{-1} ως προς την κυρτότητα και να αποδείξετε ότι ο άξονας συμμετρίας των $C_f, C_{f^{-1}}$ είναι η κοινή τους εφαπτομένη στο $O(0,0)$.

Μονάδες 8

B3. i) Να αποδείξετε ότι: $f(x) \geq f^{-1}(x)$ για κάθε $x > -1$.

ii) Να λύσετε την εξίσωση: $f(x) + f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x) + \eta\mu x$ στο $(0, +\infty)$.

Μονάδες 6

B4. Αν G μια παράγουσα της συνάρτησης $g(x) = f(x) + f^{-1}(x), x > 0$ να δείξετε ότι για $0 < \alpha < \beta$ ισχύει:

$$(\beta - \alpha) \cdot g(\alpha) < G(\beta) - G(\alpha) < (\beta - \alpha) \cdot g(\beta)$$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f'(x) = k - \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x}$, $k \in \mathbb{R}$ για κάθε $x > 0$ η οποία παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0 = 2$ με τιμή $1 - \ln 2$.

Γ1. Να δείξετε ότι $k = 1$ και ότι ο τύπος της f είναι $f(x) = x + \frac{2}{x} - \ln x - 2$.

Μονάδες 4

Γ2. i) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

Μονάδες 4

ii) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης

$$x^2 + 2 = x(\alpha + \ln x + 2) \text{ με } x > 0$$

για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού α .

Μονάδες 3

Γ3. i) Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή στο πεδίο ορισμού της και να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $M(1, f(1))$.

Μονάδες 3

ii) Να λύσετε την ανίσωση $e^{3x^2 - 5x + 2} > x^x$, $x > 0$.

Μονάδες 5

Γ4. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = f(x) + \ln x + 2$ την πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της g στο $+\infty$ και τις ευθείες $x = 1$ και $x = e$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $A = (0, +\infty)$ με συνεχή πρώτη παράγωγο για την οποία ισχύουν:

$$\bullet f'(1) \neq -1 \text{ και } f(1) = 1$$

$$\bullet f(f^2(x)) + f^2(x) = f(x) + x \text{ για κάθε } x > 0$$

Δ1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο A .

Μονάδες 8

Δ2. Να δείξετε ότι για την συνάρτηση g με

$$g(x) = \begin{cases} \left(\int_1^2 f(t) dt \right) \cdot x^3, & x \geq 0 \\ \left(\int_2^3 f(t-1) dt \right) \cdot x^2, & x < 0 \end{cases}$$

ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $\Delta = [-1, 1]$.

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2017
Β' ΦΑΣΗ

Μονάδες 8

Επιπλέον θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f(x^2 + 1)$, με $x > 0$

Δ3. Να δείξετε ότι: $\int_2^3 h(x) dx > \int_1^2 h(x) dx$

Μονάδες 5

Δ4. Να δείξετε ότι η εξίσωση

$$\left(\int_2^3 \left(h(t) \cdot \int_2^3 h(u) du \right) dt \right) \cdot (x - 2) + f(x) \left(\int_1^2 h(t) dt \right)^2 = 0$$

έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $(1, 2)$.

Μονάδες 4